PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO I

Ejercicio nº 1.-

a) **Halla un vector unitario que sea perpendicular a $(3, -1, 1)$ y a $(1, -2, 0)$.**

b) ¿Es cierto que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$? Pon un ejemplo.

Ejercicio nº 2.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

a) **El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.**

b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejercicio nº 3.-

a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=2(\vec{u}\times\vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}(3, 0, -1)$.

Ejercicio nº 4.-

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$ y $\vec{w}(2, -3, 0)$.

b) **¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?:**

$$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]; \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}]$$

Ejercicio nº 5.-

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m=3$.

SOLUCIONES

Solución nº 1:

a) Un vector perpendicular a los dos dados es:

$(3, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -5)$

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1: $\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$

También cumple las condiciones su opuesto: $\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

b) En general, no es cierto. Por ejemplo:

$\vec{u} = (1, 0, 0) \quad \vec{v} = (1, 0, 0) \quad \vec{w} = (0, 1, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{0}\times\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{u}\times(0, 0, 1) = (1, 0, 0)\times(0, 0, 1) = (0, -1, 0) \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}).$$

Solución nº 2: a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow \textit{Volumen} = 4 \text{ u}^3$$

b) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ han de ser linealmente dependientes ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes); por tanto, su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \rightarrow \alpha = 4$$

Solución nº 3:

a) $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{u} + \vec{u}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{u} - \vec{v}\times\vec{v} \overset{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u}\times\vec{v})$

(*) Tenemos en cuenta que $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$ y que $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$.

b) $u \times v = (2, -1, 1)\times(3, 0, -1) = (1, 5, 3)$

Solución nº 4:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17 \rightarrow \textit{Volumen} = 17 \text{ u}^3$$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que:

$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\cdot(-17) = -34$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}] = 0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

Solución nº 5:

a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

Ha de ser $m \neq 4$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$$

b) Para $m = 3$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbf{R}^3$. Por tanto, cualquier vector de $\mathbf{R}^3$, en particular (2, 1, 0), depende linealmente de ellos.